ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS, Vol. 23, No. 1, 1976

MESURE DE HAUSDORFF DES COMPLEMENTAIRES DES U_ε DE ZYGMUND

PAR
BERNARD CONNES

ABSTRACT

A. Zygmund originally introduced the notion of sets of unicity U_ε, and showed that they differ from classical U-sets in that they can have positive measure. He then asked if they could be of full measure. J. P. Kahame and Y. Katznelson proved recently that there were U_ε of full measure. The object of this paper is to show that, in terms of Hausdorff measure, one cannot go beyond that result, for a general sequence ε. In the case of a given sequence ε, and a given Hausdorff determining function h, it gives a simple test for determining the existence of U_ε with a complement of zero Hausdorff measure. In this paper the proof of the main known results concerning the measure of U_ε sets is also reproduced.

Soit $\varepsilon = \{\varepsilon_n, n \geqq 0\}$, une suite décroissante positive, on désigne par S une série trigonométrique de la forme $\Sigma_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{int}$ avec $a_n = O(\varepsilon_{|n|})$ quand $n \to \pm\infty$. On dit qu'un ensemble E du cercle est un $U(\varepsilon)$ si l'hypothèse que S converge vers 0 hors de E entraîne que S est identiquement nulle. Si lim $\varepsilon_n > 0$ on retrouve les ensembles d'unicité usuels, au sens de Cantor. Pour lim $\varepsilon_n = 0$, la notion a été introduite par A. Zygmund [2], qui a démontré qu'il existe, quelle que soit la suite ε choisie, des ensembles fermés $U(\varepsilon)$ de mesure arbitrairement voisine de 2π. J.-P. Kahane et Y. Katznelson ont récemment prouvé [1] qu'il existe des $U(\varepsilon)$ de mesure pleine. Cet article traite la question de la mesure de Hausdorff des complémentaires des ensembles $U(\varepsilon)$. On montre en effect qu'il n'existe pas de fonction déterminante h pour laquelle, quelle que soit la suite ε choisie, il existe des $U(\varepsilon)$ dont le complémentaire soit de h mesure nulle si $h(x)/x \to \infty$. Ensuite on détermine des conditions permettant de décider de l'existence de tels $U(\varepsilon)$ dans le cas où la suite ε est donnée.

Les démonstrations de l'existence de $U(\varepsilon)$ de mesure positive, puis pleine, étant utilisées par la suite nous les rappelons au début de cet article, la première

Received October 15, 1974

étant une version légèrement modifiée de [2], et la seconde étant intégralement empruntée à [1].

Soit donc ε_n une suite décroissante positive convergeant vers 0. On peut supposer, quitte à majorer ε_n, que ε_n est convexe et que $\lim(n\varepsilon_n)=\infty$.

Pour toute fonction φ de classe C^∞, le produit formel $S\varphi$ converge vers 0 au point t si et seulement si S converge vers 0 en t ou φ converge vers 0 en t (Rajchman), et grâce aux hypothèses faites sur ε, $S\varphi(n)=O(\varepsilon_n)$. S est une distribution sur le cercle, et plus précisément appartient au dual du Banach $A(\varepsilon)$ des distributions g telles que $\Sigma_{-\infty}^{+\infty}|\hat{g}(n)|\varepsilon_n<\infty$.

Il en résulte qu'un fermé F sera un ensemble $U(\varepsilon)$ si et seulement si les fonctions de classe C^∞ nulles au voisinage de F approchent 1 dans $A(\varepsilon)$.

Soit ψ une fonction C^∞ de la droite réelle, à support dans l'intervalle ouvert $(-1/2,1/2)$, d'intégrale 2π et associons lui pour tout λ positif $<2\pi$, la fonction périodique ψ_λ définie sur $[-\pi,\pi]$ par: $\psi_\lambda(t)=(1/\lambda)\psi(t/\lambda)$. Soit λ_k une suite positive à déterminer ultérieurement, posons $\varphi_k(t)=\psi_{\lambda_k}(kt)$ et montrons que pour des λ_k adéquats φ_k converge vers 1 dans $A(\varepsilon)$. Nous avons

$$\|\varphi_k-1\|_{A(\varepsilon)}=\sum_{n\neq0}|\hat{\psi}_{\lambda_k}(n)|\,\varepsilon_{|kn|}=\sum_{n\neq0}|\hat{\psi}(\lambda_k n)|\,\varepsilon_{|kn|}.$$

Puisque ε_n décroît, cette quantité tendra vers 0 si $\varepsilon_k/\lambda_k\to0$ (majorée par des sommes de Riemann de $\hat{\psi}$). Fixons ainsi $\lambda_k=\sqrt{\varepsilon_k}$. Le support de φ_k est contenu dans un ouvert G_k composé de k intervalles de longueur λ_k/k, et donc de mesure λ_k. Puisque $\lambda_k\to0$ on pourra ainsi extraire une sous-suite k_ν telle que $\Sigma\lambda_{k_\nu}<a$ aussi petit que l'on veut. Il en résultera que $F=C\bigcup_\nu G_{k_\nu}$ sera un $U(\varepsilon)$ dont la mesure sera supérieure à $2\pi-a$, puisque φ_{k_ν} sont nulles au voisinage de F. Nous concluons donc avec A. Zygmund qu'il existe des fermés $U(\varepsilon)$ de mesure arbitrairement voisine de 2π.

La démonstration de l'existence de $U(\varepsilon)$ de mesure pleine s'inspire du théorème de N. Bari selon lequel une réunion dénombrable de fermés d'unicité est un ensemble d'unicité. Toutefois, on ne peut plus utiliser le fait qu'un ensemble d'unicité est de mesure nulle. Ce fait est remplacé par un choix convenable de fermés $U(\varepsilon)$ et par l'existence d'une mesure μ adéquate de $A(\varepsilon)$ telle que les $U(\varepsilon)$ choisis soient de μ mesure nulle.

Dans la démonstration précédente nous aurions pu choisir $\psi\geqq0$. A partir de maintenant, nous appellerons fermé $U^+(\varepsilon)$ un fermé tel que les fonctions positives de classe C^∞, nulles en son voisinage, approchent 1 dans $A(\varepsilon)$. Ainsi, il existe des $U^+(\varepsilon)$ de mesure arbitrairement voisine de 2π. Démontrons d'abord que si A est le complémentaire d'une réunion dénombrable de fermés F_m du type $U^+(\varepsilon)$ et si S est la série de Fourier d'une fonction bornée convergeant vers 0 sur A, S est identiquement nulle.

PREUVE. On construit par induction, étant donné $0 < \alpha < 1$, une suite de fonctions $f_m \geqq 0$ de classe C^∞ de la façon suivante; f_m est nulle au voisinage de F_m, $\|f_1 - 1\|_{A(\varepsilon)} < \alpha/2$, $\|f_1 f_2 \cdots f_{m-1}\|^* \|f_m - 1\|_{A(\varepsilon)} < \alpha 2^{-m}$ où $\|\quad\|^*$ est la norme des multiplicateurs de $A(\varepsilon)$. Les produits $f_1 \cdots f_m$ convergent dans $A(\varepsilon)$ vers une distribution μ telle que $\|\mu - 1\|_{A(\varepsilon)} < \alpha$. Comme $f_1 \cdots f_m$ est positive, et nulle dans un voisinage de $F_1 \cup F_2 \cdots \cup F_m$, μ est une mesure positive par rapport à laquelle tous les F_m sont négligeables, ainsi par conséquent que leur réunion. Si S converge vers 0 sur A et est la série de Fourier d'une fonction bornée, on obtient par intégration des sommes de Féjer:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mu}(n)\bar{a}_n = 0 \quad \text{donc} \quad |a_0| \leqq \alpha \sup\left(\frac{|a_n|}{\varepsilon_{|n|}}\right).$$

Comme α est arbitrairement petit, $a_0 = 0$, de même $a_n = 0$ pour tout n.

Montrons à l'aide du résultat précédent que toute réunion dénombrable de fermés $U^+(\varepsilon)$ est un $U(\varepsilon)$.

Désignons comme précédemment par F_m ces fermés, et soit S une série trigonométrique convergeant vers 0 sur A; il faut montrer que S est la série nulle.

Soit N l'ensemble des t où les sommes partielles de S ont une limite supérieure $\geqq 1$. N est un G_δ contenu dans la réunion des F_m.

Si $N = \varnothing$, S est la série de Fourier d'une fonction bornée (Riemann) et le résultat précédent montre que $S = 0$. Si $N \neq \varnothing$, d'après le lemme de Baire, il existe un intervalle I et un m tels que $\varnothing \neq I \cap N \subset I \cap F_m$. Soit ϕ une fonction de classe C^∞, portée par un intervalle contenu dans I et disjoint de F_m. Comme les sommes partielles de S ont une limite supérieure bornée sur le support de φ, les sommes partielles de $S\varphi$ ont une limite supérieure bornée partout (Rajchman) donc on est ramené pour $S\varphi$ au cas $N = \varnothing$ donc $S\varphi = 0$.

Il en résulte que S converge vers 0 sur $I - F_m$, et que $S\psi$ converge vers 0 hors de F_m si ψ est une fonction de classe C^∞, nulle hors de I et strictement positive sur I. Comme $S\psi(n) = O(\varepsilon_n)$ et que F_m est $U(\varepsilon)$, $S\psi = 0$ donc S converge vers 0 sur I ce qui dément l'hypothèse faite sur N.

Puisqu'il existe des $U^+(\varepsilon)$ de mesure arbitrairement voisine de 2π on peut prendre F_m tels que la mesure de leur réunion soit 2π et conclure avec J.-P. Kahane et Y. Katznelson qu'il existe des $U(\varepsilon)$ de mesure pleine.

Dans la suite de cet article nous appellerons fonction de Hausdorff une fonction h continue croissante et concave sur $[0, +\infty[$ telle que $h(0) = 0$, et

h-mesure d'un ensemble, la mesure de Hausdorff associée à la fonction h. Si $\lim(h(x)/x) < \infty$, la h measure est équivalente à la mesure de Lebesgue, qui vient d'être étudiée. Nous supposerons toujours dans la suite que $\lim(h(x)/x) = \infty$.

THEOREME 1. *Si h est une fonction de Hausdorff telle que* $\lim(h(x)/x) = \infty$, *il existe une suite ε_n telle que tous les complémentaires d'ensembles $U(\varepsilon)$ boréliens soient de h mesure infinie. Plus précisément, si* $\underline{\lim}\, nh(1/n)\varepsilon_n > 0$ *il n existe pas de $U(\varepsilon)$ borélien dont le complémentaire soit de h mesure finie. En particulier, si $\varepsilon_n = n^{-\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$ il n'existe pas de $U(\varepsilon)$ dont le complémentaire soit de dimension de Hausdrff inférieure à* $1 - \alpha$.

PREUVE. Supposons que V est le complémentaire d'un $U(\varepsilon)$ de h mesure finie. On va construire un recouvrement par des intervalles ouverts I_k de V ayant les propriétés suivantes:

a) $\sum_1^\infty h(|I_k|) < \infty$

b) $\sum_1^\infty |I_k| < 2\pi$

c) les I_k sont deux à deux disjoints

d) $|I_k|$ décroît.

En effet, par hypothèse on a un recouvrement qui vérifie (a) avec $|I_k| < \alpha$ arbitrairement petit et $\Sigma_1^\infty h(|I_k|) < A$; puisque $h(x)/x \to \infty$ on peut prendre α suffisamment petit pour avoir (b). Des hypothèses faites sur h, il résulte que h est sous-additive. On a donc (c) en remplaçant l'ensemble des I_k constituant une composante connexe par leur réunion, et (d) s'obtient en ordonnant les I_k ainsi obtenus.

Soit S la fonction caractéristique du complémentaire de la réunion des I_k; on veut construire une suite ε_n indépendante du choix des I_k et telle que $\hat{S}(n) = O(\varepsilon_{|n|})$. A l'exception du premier terme

$$|\hat{S}(n)| = |\widehat{(1-S)}(n)| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{\infty}(e^{ni\alpha_k} - e^{nj\beta_k})\right|$$

où $I_k = (\alpha_k, \beta_k)$, car les intervalles sont disjoints.

Donc pour $n \neq 0$, on a

$$|\hat{S}(n)| \leqq \frac{1}{|n|}\sum_k |e^{ni|I_k|} - 1|.$$

Puisque $|I_k|$ décroît $h(|I_k|)$ décroît et la série associée converge; donc $h(|I_k|)\leqq A/k$. En particulier $n|I_k|\leqq 1$ quand $h(1/n)\geqq A/k$, ou $k\geqq A/h(1/n)$. Posant $k_0=[A/h(1/n)]$, on a en majorant l'exponentielle:

$$|\hat{S}(n)|\leqq(1/n)\left(\sum_1^{k_0}\cdot+\sum_{k_0+1}^{\infty}\cdot\right)\leqq 2A/nh(1/n)+\sum_{k>k_0}|I_k|.$$

Mais, d'après le choix de k_0, $k>k_0$ entraîne $|I_k|<1/n$; donc puisque $h(x)/x$ décroît (concavité):

$$\sum_{k>k_0}|I_k|=\sum_{k>k_0}h|I_k|\cdot\frac{|I_k|}{h(|I_k|)}\leqq\frac{1}{nh(1/n)}\cdot\sum_1^{\infty}h|I_k|.$$

Il en résulte que $\hat{S}(n)=O(nh(1/n))^{-1}$, donc $O(\varepsilon_n)$ en prenant $\varepsilon_n=(nh(1/n))^{-1}$. D'autre part $S\neq 0$ d'après (b) et S converge vers 0 sur tout I_k donc sur V, donc V ne peut être le complémentaire d'un U_ε.

Les deux autres faits sont de simples corollaires de ce résultat. Il apparaît que la limite de la quantité $n\varepsilon_n h(1/n)$ joue un rôle important pour décider de l'existence de $U(\varepsilon)$ dont le complémentaire est de h mesure finie. Nous montrons maintenant qu'avec certaines restrictions sur h la réciproque est vraie.

THEOREME 2. *Si h est une fonction de Hausdorff telle que $\overline{\lim}_{u\to 0}(h(u)/h(2u))<1$, si ε_n est une suite convexe décroissante telle que* $\lim n\varepsilon_n=\infty$ *et si $nh(1/n)\varepsilon_n$ tend vers 0, il existe des $U(\varepsilon)$ dont le complémentaire est de h-mesure nulle.*

En particulier si $\varepsilon_n=n^{-\alpha}$ $(0<\alpha<1)$ il existe des $U(\varepsilon)$ dont le complémentaire est de dimension de Hausdorff $1-\alpha$.

PREUVE. Revenons aux définitions et notations de la démonstration de l'existence de fermés $U(\varepsilon)$ de mesure positive, et supposons $\psi\geqq 0$.

Nous avons vu que $\|\varphi_k-1\|_{A(\varepsilon)}=\Sigma_{n\neq 0}|\hat{\psi}(\lambda_k n)|\,\varepsilon_{|kn|}$. Supposons λ_k choisis tels que cette quantité tende vers 0 quand $k\to\infty$. Alors le support de φ_k est contenu dans l'ouvert λ_k/k. Soit k_ν une suite croissante d'entiers, $\bigcup_{\nu>m}G_{k_\nu}$ sera le complémentaire d'un $U^+(\varepsilon)$ par définition, donc $V=\bigcap_m\bigcup_{\nu>m}G_{k_\nu}$ est le complémentaire d'un $U(\varepsilon)$, réunion dénombrable de fermés $U^+(\varepsilon)$. V est contenu dans la réunion des intervalles qui constituent les G_{k_ν} pour $\nu>m$ aussi grand que l'on veut. Si $\underline{\lim}\,kh(\lambda_k/k)=0$ on pourra extraire une sous suite k_ν telle que $\Sigma_\nu k_\nu h(\lambda_{k_\nu}/k_\nu)$ converge donc telle que $\Sigma_{\nu\geqq m}\cdot\to 0$ quand $m\to\infty$.

Or la somme des termes de cette série est précisément $\Sigma h(|I_p|)$ où I_p est un recouvrement de V par des intervalles ouverts arbitrairements petits quand m

croît. Il en résultera donc que V sera de h mesure nulle. Le problème consiste donc à trouver λ_k tel que:

a) $\Sigma_{n\neq 0}|\hat{\psi}(\lambda_k n)|\,\varepsilon_{|kn|}\to 0$ quand $k\to\infty$

b) $\underline{\lim}\, kh(\lambda_k/k)=0$.

Pour simplifier les notations nous limiterons la somme du (a) aux termes $n>0$.

Il existe une fonction H ayant les mêmes propriétés que h et telle que $h(x)=O(H(x))$ quand $x\to 0$, avec toujours $nH(1/n)\varepsilon_n\to 0$. Nous supposerons, quitte à modifier H en dehors d'un voisinage de 0, que $H(u)/H(2u)<a<1$.

Posons $\lambda_k = kH^{-1}(1/k)$; ils satisfont à (b); montrons qu'ils vérifient aussi (a). Nous aurons besoin du lemme suivant dont la démonstration est donnée à la fin.

Lemme. *Il existe une fonction φ continue et croissante sur $[0,+\infty[$, telle que pour tout couple de réels positifs p, q: $qH(1/p)\cdot\varphi[pH^{-1}(1/q)]\geqq 1$ et telle que $\varphi(x)=O(x)$ quand $x\to\infty$ et $\varphi(x)=O(x^\alpha)$ quand $x\to 0$, pour un $\alpha>0$.*

En admettant ce lemme, (a) devient, avec $n>0$,

$$\sum_{n>0}|\hat{\psi}(\lambda_k n)|\,\varepsilon_{kn}=\sum_{n>0}\lambda_k\frac{|\hat{\psi}(\lambda_k n)|\,\varphi(\lambda_k n)}{\lambda_k n}\cdot\frac{knH(1/kn)\varepsilon_{kn}}{kH(1/kn)\varphi(\lambda_k n)}.$$

Le numérateur de l'expression de droite du produit tend vers 0 par hypothèse ($nH(1/n)\varepsilon_n\to 0$), uniformément en $n>0$ quand $k\to\infty$. Le dénominateur vaut en explicitant λ_k: $kH(1/kn)\varphi(\lambda_k n)=kH(1/kn)\cdot\varphi(knH^{-1}(1/k))\geqq 1$ d'après le lemme, avec $p=kn$, $q=k$. Enfin l'expression de gauche du produit est le terme général d'une somme de Riemann de la fonction continue et intégrable $|\hat{\psi}(x)|\,\varphi(x)/x$. Donc $\Sigma_{n>0}|\hat{\psi}(\lambda_k n)|\,\varepsilon_{kn}\to 0$ quand $k\to\infty$ ce qui prouve le résultat.

Preuve du Lemme. On veut avoir $qH(1/p)\varphi(pH^{-1}(1/q))\geqq 1$, posons donc $x=pH^{-1}(1/q)$. Il suffit que: $\varphi(x)\geqq H(x/p)/H(1/p)$ pour tout x. Posons $\varphi(x)=\sup_{u>0}(H(ux)/H(u))$. Ainsi φ est croissante. Par convexité, pour $x\geqq 1$, $H(ux)\leqq xH(u)$ donc $\varphi(x)\leqq x$ pour $x\geqq 1$, donc φ est finie partout. De plus φ est continue car pour $x\geqq y$ on a:

$$1\leqq\varphi(x)/\varphi(y)=\frac{\sup(H(ux)/H(u))}{\sup(H(uy)/H(u))}\leqq\sup(H(ux)/H(uy))=\varphi(x/y)\leqq(x/y).$$

Enfin, si $\frac{1}{4}<x\leqq\frac{1}{2}$, $\varphi(x^n)=\sup[(H(ux^n)\cdots H(ux))/(H(ux^{n-1})\cdots H(u))]$ donc $\varphi(x^n)\leqq(\varphi(x))^n\leqq a^n$ car $\varphi(\frac{1}{2})\leqq a$ par hypothèse. Posant $y=x^n$, $\varphi(y)\leqq(1/a)y^{-\log_2 a}=(1/a)y^\alpha$, $\alpha=-\log_2 a>0$.

REMARQUE. L'hypothèse faite sur h revient à dire qu'il existe α compris entre 0 et 1 tel que $h(x) \cdot x^{-\alpha}$ soit croissante au voisinage de 0. Elle exclut par conséquent les fonctions de Hausdorff tendant vers 0 très lentement, ce qui correspond à des ε_n proches de $1/n$.

REFERENCES

1. J.-P. Kahane et Y. Katznelson, C. R. Acad. Sci. Paris **277** (1973), 893.
2. A. Zygmund, *Trigonometric Series*, I, 1959.

DEPT. DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE PARIS XI, 91405
ORSAY, FRANCE